BLOQUE I: ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA I

CC-By 4.0 Ángel Vázquez Hernández 2024



https://cienciamorada.es

Sumario

NÚMEROS. TIPOS, OPERACIONES Y REPRESENTACIÓN....1
Números naturales, enteros y reales...1
Números naturales, enteros y reales....2
Ortografía de los números escritos con cifras....4
Notación científica....5
Escritura de números muy grandes.5
Escritura de números muy pequeños....5
Números racionales....6
Divisibilidad....7
Descomposición en producto de factores primos....7
Fracciones equivalentes....8
Método estándar de redondeo....9
Cifras significativas....9
Números periódicos....10
Multiplicaciones y divisiones....10
Producto de dos factores, o división....10
Producto de múltiples factores....10
Potencia de base negativa....10
Jerarquías de operaciones....10
Suma y resta de fracciones....12
Fracciones de igual denominador..12
Fracciones de distintos denominadores....12
Multiplicación de fracciones....12
División de fracciones....13
ESTIMACIONES Y PROPORCIONALIDAD....13
Escalas....13
Teorema de Tales....14
Porcentajes....16
Descuentos....16
IVA....16
Otros....18
ÁLGEBRA....19
Polinomios....19
Suma y resta de polinomios....19
Producto de polinomios....20
Factorización de polinomios....20
Ecuaciones de primer grado....21
Ecuaciones de segundo grado....23

Este documento puede abrirse y editarse usando Libre Office.

NÚMEROS. TIPOS, OPERACIONES Y REPRESENTACIÓN

Números naturales, enteros y reales

Durante la Edad Media la expansión del Islam estableció rutas culturales que se extendieron desde la India hasta la Península Ibérica. **En el siglo IX Fatima y Mariam al-Fihri fundaron una madrasa en Fez que se convertiría en la Universidad de Qarawiyyin, la más antigua del mundo.** De esta universidad saldría Gerberto de Aurillac, conocido por convertirse en el papa Silvestre II y por ser uno de los principales responsables del uso de números arábigos en Europa.



Universidad de Qarawiyyin (Fez, Marrruecos), la más antigua del mundo, fundada por las hermanas tunecinas Fatima y Mariam al-Fihri en el siglo IX (Imagen: dominio público).

De hecho, si no llega a ser por los árabes, estaríamos todavía utilizando números romanos y calculando con piedras (la palabra "cálculo" hace referencia al término latino "calculus", piedra, por el uso que los romanos hacían de piedras para realizar operaciones matemáticas). El nombre del matemático persa Al-Jwarizmi dió lugar a los términos "álgebra", "algoritmo" y "guarismo". Las bases de las matemáticas actuales llegaron de África. Bueno, los números arábigos proceden realmente de la India.

Números naturales, enteros y reales

Los números naturales son los utilizados para contar los elementos de un conjunto: ℕ = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}. El número "0" sería la ausencia de elementos en el conjunto, razón por la que algunas definiciones no lo incluyen dentro del conjunto de números naturales[1].

Los números enteros son los números naturales, sus opuestos[2] y el cero: ℤ ={..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...}. En ausencia de signo se da por supuesto que se trata de números positivos.



¡CUIDADO! Hay una tendencia muy extendida a "saltarse" el cero, pasando en los números enteros directamente de -1 a 1, lo que ocasiona muchos errores.

Los números reales incluyen a los números enteros y a todos los demás números (más conocidos como "números decimales") que hay entre ellos. El conjunto de los números reales se simboliza como ℝ . Se representa gráficamente mediante la recta real.

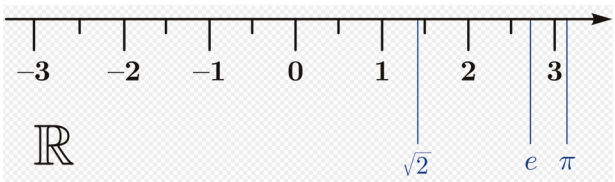
1 En la numeración romana el "0" no existía, por lo que en Europa no comenzó a utilizarse como número hasta el siglo XII, con la numeración hindi o arábiga.

2 Los números negativos.

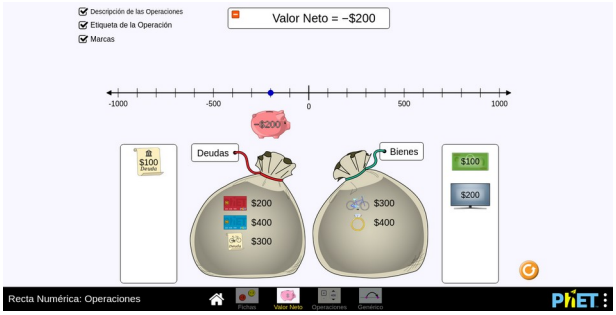


¡CUIDADO! Hay unas normas básicas que hay que cumplir y que suelen ser ignoradas por los principiantes:

- Si la recta real se representa horizontalmente los valores negativos quedan a la izquierda, y los positivos a la derecha. Si se representa verticalmente los valores negativos quedan abajo y los positivos arriba.
- Dentro de un mismo eje todos los segmentos deben tener igual longitud[3].
- El "0" es un valor real[4].



Recta real (Imagen: dominio público)



Valor neto.

(Imagen: Recta Numérica: Operaciones, CC-By PhET Interactive Simulations University of Colorado Boulder https://phet.colorado.edu)

3 Es un error de principiante construir los segmentos "a ojo": utiliza la cuadrícula del papel para trabajar correctamente. En las escalas logarítmicas no se cumple esta regla, pero su uso excede el nivel de este curso.

4 Por alguna razón muchas personas tienden a "saltarse" el valor "0" al construir un eje, representando los números enteros como, por ejemplo -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,... Pero el "0" es un valor real que debe ser representado entre los valores negativos y positivos.

Ortografía de los números escritos con cifras

La utilización de los números arábigos ha ido cambiando con el tiempo, dando lugar a una diversidad de normas en distintos países. En España, según la RAE[5]:



- **Al escribir números de más de cuatro cifras, se agruparán estas de tres en tres, empezando por la derecha, y separando los grupos por espacios en blanco**: *1 234 567* (y no *1.234.567*[6] *o 1,234,567*[7]).
- **Los números de cuatro cifras se escriben sin espacios de separación**: *1234* (no *1 234*).



- **Para separar la parte entera de la decimal debe usarse la coma, según establece la normativa internacional**: *El valor de π es 3,141 593*.

  En España la notación habitual es la coma. La RAE, no obstante, dice que «Con el fin de promover un proceso tendente hacia la unificación, se recomienda el uso del punto como signo separador de los decimales».



La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas[8] también acepta tanto el punto como la coma.



El CSIC[9], por su parte, dice que las últimas indicaciones académicas recomiendan separar la parte decimal de la parte entera con un punto (3.141 593), con el fin de unificar su uso con la normativa internacional, si bien se sigue aceptando el uso de la coma (3,141 593). El uso del apóstrofo (3'141 593) no es correcto.

5 Real Academia Española. Se dedica a la regularización de la lengua española.
6 Notación tradicional en España.
7 Notación habitual en muchas calculadoras electrónicas, justo al revés que la notación tradicional española: utiliza puntos donde nosotros solíamos usar comas, y comas donde nosotros solíamos usar puntos. Esto genera confusión entre quienes utilizan poco la calculadora. Algunos modelos de calculadoras permiten modificar su configuración para usar puntos o comas como separadores decimales. En cualquier caso la mayoría de las calculadoras electrónicas representan, en el teclado, el punto y no la coma (suele estar en la última fila de teclas: una tecla con un punto en su centro).

8 Organismo que regula el Sistema Internacional de unidades.
9 Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Agencia estatal española dedicada a la promoción de la investigación científica.

Notación científica

Para acortar la lectura y escritura de números se desarrolló la notación científica.

Escritura de números muy grandes

Si tenemos en cuenta que:

$a \cdot 10^b = a \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10$

multiplicando ***b*** veces por ***10***, entonces podemos escribir números muy grandes de una forma breve. Por ejemplo:

$7 \cdot 10^{12} = 7\,000\,000\,000\,000$

$4.98 \cdot 10^5 = 498\,000$



¡CUIDADO! El uso de notación científica en la calculadora varía de unos modelos a otros, y deberás revisar tu calculadora para averiguar como utilizarla:

- Por ejemplo, para escribir $7 \cdot 10^5$ la combinación de teclas a utilizar suele ser la siguiente: 7 EXP 5 o bien 7 ·10ˣ 5 (las teclas EXP y ·10ˣ suelen estar en la última fila del teclado de la mayoría de las calculadoras científicas).
- En la pantalla de la calculadora, según el modelo, puede aparecer de distintas formas. Por ejemplo:
  - 7x10^{05}
  - 7 E05
  - 7 05
  - 7 E 5
  - Etc.

Escritura de números muy pequeños

Si tenemos en cuenta que:

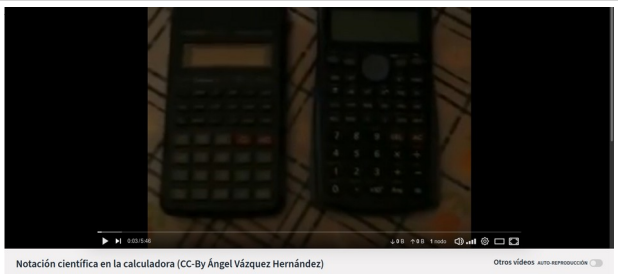
$$a^{-b} = \frac{1}{a^b} \quad \text{entonces} \quad 10^{-x} = \frac{1}{10^x}$$

y esto nos permite escribir números muy pequeños (aunque de gran longitud) de una forma breve. Por ejemplo:

$$7 \cdot 10^{-9} = 7 \cdot \frac{1}{10^9} = \frac{7}{1\,000\,000\,000} = 0.000\,000\,007$$



¡CUIDADO! El signo "-" del exponente se introduce mediante una tecla que, en algunos modelos está marcada como (-) y en otros como + / - . Suele estar arriba, a la izquierda.



Es importante aprender a utilizar notación científica en nuestra calculadora.

Números racionales

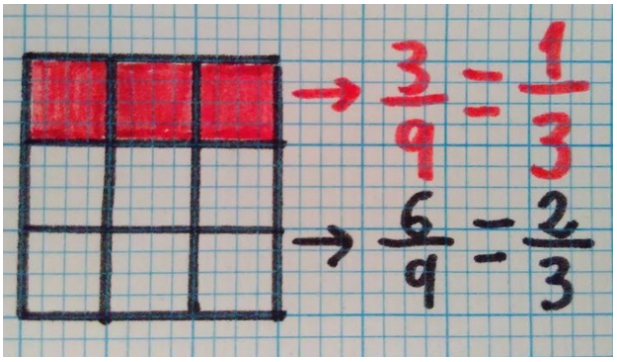
Los números racionales (ℚ) son el subconjunto de los números reales que pueden expresarse como cociente de dos números reales. Son conocidos, también, como fracciones o quebrados.

Suelen representarse como un cociente en la forma $\frac{a}{b}$, **donde *a* es el numerador y *b* el denominador.** El denominador indica el número de partes totales de un todo, y el numerador cuantas de esas partes son contabilizadas.

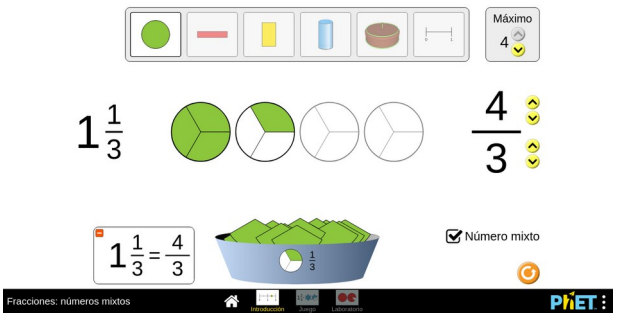
Ejemplo: en una familia hay tres mujeres y dos hombres.

- Total de miembros de la familia: 5 personas.
- Total de mujeres: 3.
- Total de hombres: 2.

La fracción de hombres será $\frac{2}{5}$ (dos quintos) y la de mujeres será $\frac{3}{5}$ (dos quintos).



Representación gráfica de fracciones
En la cuadrícula de la imagen se han coloreado en rojo tres cuadrados de un total de nueve, por lo que la fracción coloreada es de tres novenos. También puede interpretarse como que se ha coloreado una fila de un total de tres, por lo que la fracción coloreada es un tercio. La fracción no coloreada será seis novenos o dos tercios.



Números mixtos.

(Imagen: Fracciones: números mixtos, CC-By PhET Interactive Simulations University of Colorado Boulder https://phet.colorado.edu)

Actividades

Calcula, y representa gráficamente, las fracciones de hombres, mujeres y personas no binarias[10] de tu familia.

Divisibilidad

Se considera que un número es divisible entre otro cuando el resultado de dicha división es un número entero.

- **Un número es divisible entre 2** si termina en cero o cifra par.
- **Un número es divisible entre 3** si la suma de sus cifras es tres o múltiplo de tres.
- **Un número es divisible entre 5** si termina en cero o cinco.

Descomposición en producto de factores primos

Un número primo es aquel que solo es divisible entre sí mismo y la unidad: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, etc.

Todo compuesto (es decir, entero no primo) puede expresarse como un producto de factores primos. Esto suele hacerse para encontrar el mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD) de varios números.

Ejemplo: supongamos que necesitamos conocer el mínimo común múltiplo y máximo común divisor de 12 y 30.

Comenzamos descomponiendo 12 y 30 en productos de factores primos:

$$12=2^2\cdot 3$$

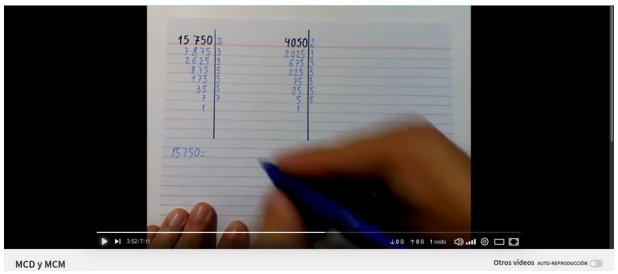
$$30=2\cdot 3\cdot 5$$

Obtendremos el mínimo común múltiplo de ambas cantidades como el **producto de los factores comunes**[11] **y no comunes con el mayor exponente**[12]:

$$2^2\cdot 3\cdot 5=60$$

El máximo común divisor lo obtendremos como el **producto de los factores comunes**[13] **con en menor exponente**[14]:

$$2\cdot 3=6$$



El mínimo común múltiplo de 15 750 y 4050 es 141 750, mientras que el máximo común divisor es 450.

Más ejemplos de descomposiciones en factores primos:

Más ejemplos de MCD y MCM:

10 Personas que no se identifican como hombres ni como mujeres de modo constante.

11 En este caso: 2, 3 y 5.

12 En este caso, entre 2 y 2^2, escogemos 2^2 (2 tiene exponente 1, mientras que 2^2 tiene exponente 2, que es mayor).

13 En este caso: 2 y 3.

14 En este caso, entre 2 y 2^2, escogemos 2 (2 tiene exponente 1, mientras que 2^2 tiene exponente 2, que es mayor).

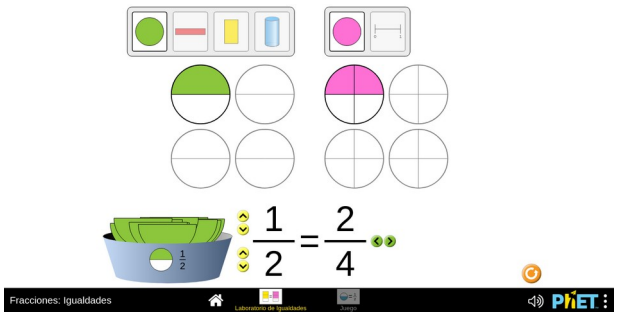
Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si representan el mismo número racional. Ejemplo:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=0.5$$

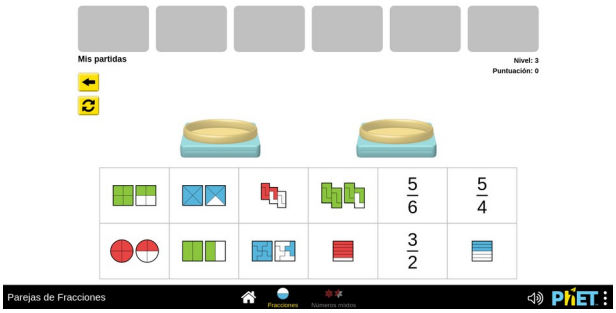
A veces, para facilitar los cálculos, es conveniente sustituir una fracción por otra equivalente cuyos valores de numerador y denominador tengan el menor valor absoluto posible (fracción irreducible). Para eso es recomendable expresar numerador y denominador como productos de factores primos y, posteriormente, eliminar los factores comunes[15]. Ejemplo:

$$\frac{12}{30}=\frac{2^2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{2}{5}$$



Fracciones equivalentes.

(Imagen: Fracciones: igualdades, CC-By PhET Interactive Simulations University of Colorado Boulder https://phet.colorado.edu)



Encuentra las parejas de fracciones.

(Imagen: Parejas de Fracciones, CC-By PhET Interactive Simulations University of Colorado Boulder https://phet.colorado.edu)

Actividades

Obtén fracciones irreducibles de las siguientes:

a) $\frac{10}{25}$

b) $\frac{20}{30}$

c) $\frac{30}{45}$

d) $\frac{40}{50}$

e) $\frac{250}{60}$

15 En este caso los factores comunes son 2 y 5. El proceso es equivalente a dividir numerador y denominador entre su máximo común divisor.

Método estándar de redondeo



A veces no deseamos o no es posible escribir la totalidad de cifras decimales de una cantidad, pero para decidir como representar estas cantidades con el menor error posible conviene seguir un método adecuado. Según el método estándar de redondeo:

- **Si el siguiente decimal es menor que 5** el anterior no se modifica.

Ejemplo: $3.141 \simeq 3.14$

- **Si el siguiente decimal es mayor que 5** el anterior se aumenta una unidad.

Ejemplo: $3.14159 \simeq 3.1416$

- **Si el siguiente decimal es 5 no seguido de ceros** el anterior se aumenta una unidad.

Ejemplo: $3.14159 \simeq 3.142$

- **Si el siguiente decimal es 5 seguido de ceros** el anterior se aumenta en una unidad si es impar, y se conserva si es par (el resultado, según esta regla, terminará siempre en una cifra par).

Ejemplo: $2.35 = 2.35000 \simeq 2.4$

Ejemplo: $2.45 = 2.45000 \simeq 2.4$

Cifras significativas

Las cifras significativas son aquellas que suponemos ciertas (las demás pueden estar afectadas por un error de medida).

Ejemplos:

27	2 cifras significativas
27.5	3 cifras significativas
27.50	4 cifras significativas

En multiplicaciones, divisiones y potencias **el resultado final tendrá tantas cifras significativas como el factor que menos tenga.**

Ejemplo: **25.69**·**1.5**=**38**.535

El número "25.69" tiene cuatro cifras significativas, pero "**1.5**" **solo tiene dos cifras signficativas**, por lo que **el resultado "38.535" solo tiene dos cifras significativas (las siguientes ya no son fiables) y, en consecuencia, redondeamos a dos cifras**:

$38.535 = 39$

Números periódicos

Los números *periódicos* son números racionales con infinitas cifras decimales que pueden representarse fácilmente por una propiedad especial: a partir de cierto punto su parte decimal está formada por una o varias cifras que se repiten *periódicamente*.

Ejemplos:

$\frac{1}{3}=0.3333333\ ...=\ 0.\hat{3}$

$\frac{1}{6}=0.1666666\ ...=\ 0.1\hat{6}$



¡CUIDADO! La mayoría de las calculadoras electrónicas[16] son incapaces de utilizar correctamente números periódicos, por lo que estos suelen aparecer en la pantalla redondeados en su última cifra.

Ejemplos:

$\frac{1}{3}=0.3333333$ $\frac{1}{6}=0.1666667$

Multiplicaciones y divisiones

Producto de dos factores, o división

a) +·+=+

b) +·-=-

c) -·+=-

d) -·-=+

Producto de múltiples factores

a) Si hay un número par de signos "-" el resultado es positivo.

Ejemplo: - 3·(- 2)·(- 4)·(- 1)=24

b) Si hay un número impar de signos "-" el resultado es negativo.

Ejemplo: - 3·2·(- 4)·(- 1)=- 24

Potencia de base negativa

a) Si el exponente es par el resultado es positivo.

Ejemplo: $(- 3)^2=-3\cdot-3=9$

b) Si el exponente es impar el resultado es negativo.

Ejemplo: $(- 3)^3=-3\cdot-3\cdot-3=-27$



¡CUIDADO! Es muy diferente el resultado si el hay un signo "-" dentro o fuera de un paréntesis elevado a un exponente.

Ejemplo:

$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$

$-3^2=-3\cdot3=-9$

Jerarquías de operaciones

Las operaciones se realizan en el siguiente orden:

1. Paréntesis y corchetes.
2. Potencias y raíces.
3. Multiplicaciones y divisiones.
4. Sumas y restas.

16 La mayoría, no todas: algunas calculadoras sí que son capaces de representar en la pantalla y utilizar adecuadamente números periódicos.

Actividades

a) 13-(9+5)=

b) (5-7)-(11-4+2)=

c) 30-2·(5+7)=

d) 3·4-6·(10-4·2)=

e) 15+4·(3+5·3-6·2)=

f) 8+7·2-3·(9-5)+3·4=

g) [6-(-8)]-[-4-(-10)]=

h) (2-8)+(5-7)-(-9+6)-(-5+7)=

i) [(-9)-6]:(-5)=

j) - 3·[-9 -(-7)]=

k) [5-(-18)]:[9-15]=

l) 4·(-6)-(-15)-2·(-7)=

m) 9·5+4-3·(2-5)+(8:2)=

n) - 4·(-5)+7·(-8)- 5·4· (- 12 +5)+8=

o) 3·4+8(2-7)-4(-5)·2+8=

p) - 4·(- 3·2+5) -8·(2+7)+3=

q) 4+3·(2-5) -4·(8+7)=

r) $13^2-(9+5)^3$=

s) $3\cdot4^2-6^2\cdot(10-4\cdot2)^3$=

t) $3\cdot4^2+(-6)^2\cdot(10-4\cdot2)^3$=

u) $\sqrt{4}$ = (solución u)

v) $\sqrt{8+7\cdot2-3\cdot(9-5)+3\cdot4}$ = (solución v)



¡CUIDADO! Es una costumbre muy extendida la de escribir el símbolo de la raíz sin abarcar la totalidad de la operación afectada por dicha raíz, lo que constituye una incorrección que puede dar lugar a errores de cálculo por no ser suficientemente cuidadoso.



¿Conoces la app Photomath? Escanea operaciones escritas a mano y calcula su resultado. Puede servirte para comprobar si has aprendido a aplicar correctamente las jerarquías de operaciones y la regla de signos.

Suma y resta de fracciones

Fracciones de igual denominador

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-\frac{d}{b}=\frac{a+c-d}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1+3-5}{2}=\frac{-1}{2}=-0.5$$

Fracciones de distintos denominadores

Para sumar y restar fracciones de distintos denominadores es necesario sustituirlas por fracciones equivalentes pero con denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{30}$$

Lo más conveniente es sustituir ambas fracciones por otras equivalentes pero con un denominador que sea el mínimo común múltiplo de 12 y 30 que, como ya hemos calculado, es 60.

Para obtener una fracción equivalente a $\frac{5}{12}$ pero con denominador 60 tendremos que multiplicar numerador y denominador por un valor que haga que el denominador sea 60. Buscamos ese número dividiendo 60 entre 12: 5. Multiplicamos numerador y denominador por ese valor:

$$\frac{5}{12}=\frac{5\cdot5}{12\cdot5}=\frac{25}{60}$$

Lo mismo hacemos con la otra fracción:

60/30=2

$$\frac{7}{30}=\frac{7\cdot2}{30\cdot2}=\frac{14}{60}$$

Entonces

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{30}=\frac{25}{60}+\frac{14}{60}=\frac{25+14}{60}=\frac{39}{60}$$

Actividades

Resuelve las siguientes sumas simplificando el resultado a una fracción irreducible cuando sea posible:

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

b) $\frac{25}{30}+\frac{45}{50}$

c) $\frac{25}{30}+\frac{45}{50}-(\frac{2}{3}-\frac{4}{5})$

Más ejemplos:

Más ejemplos:

Multiplicación de fracciones

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{7}=\frac{5\cdot8}{3\cdot7}=\frac{40}{21}$$

Actividades



Resuelve las siguientes multiplicaciones simplificando el resultado a una fracción irreducible cuando sea posible:

d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$

e) $\frac{25}{30}\cdot\frac{45}{50}$

f)



$(\frac{25}{30}\cdot\frac{45}{50})-(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5})$ (solución f))

División de fracciones

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{5}{3}:\frac{8}{7}=\frac{5\cdot 7}{3\cdot 8}=\frac{35}{24}$$

Actividades



Resuelve las siguientes divisiones simplificando el resultado a una fracción irreducible cuando sea posible:

g) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$

h) $\frac{25}{30}:\frac{45}{50}$

i) $(\frac{25}{30}:\frac{45}{50})-(\frac{2}{3}:\frac{4}{5})$

ESTIMACIONES Y PROPORCIONALIDAD

Escalas

La representación de un objeto en una imagen plana o en tres dimensiones no siempre tiene el mismo tamaño que el objeto real. A menudo la representación es más grande que el objeto real (si este es muy pequeño como, por ejemplo, una célula) o más pequeña si el objeto es muy grande (como, por ejemplo, un país representado en un mapa, o un edificio en una maqueta). A la proporción existente entre el tamaño del objeto real y el de su representación se llama **escala**. Hay tres tipos de escala:

- **Escala natural** o 1:1, en la que el objeto y su representación son de igual tamaño.
- **Escalas de ampliación**, en las que la representaciones son más grandes que los objetos reales. En una escala 20:1, por ejemplo, la representación será 20 veces más grande que el objeto real.
- **Escalas de reducción**, en las que la representación es más pequeña que el objeto real. En una escala 1:100, por ejemplo, la representación sería 100 veces más pequeña que el objeto real.

Actividades

a) La maqueta de un edificio, a escala 1:30, mide 0.5 m de altura ¿Cuál es la altura real del edificio?

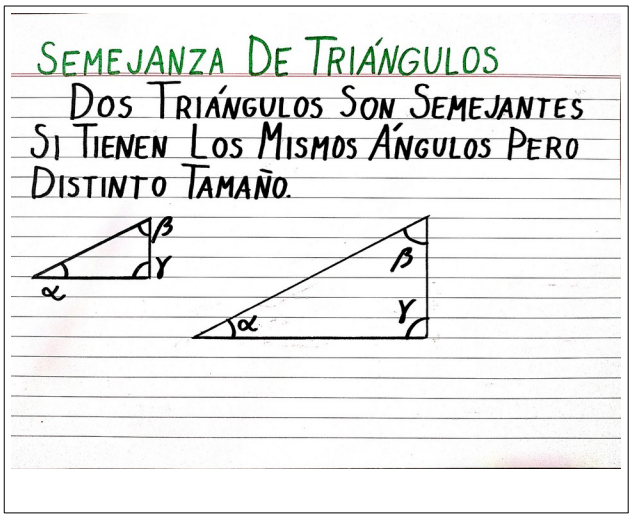
b) En un mapa a escala 1:1 000 000 dos poblaciones están separadas por 5 cm ¿Cuál es la distancia real que existe entre las dos ciudades?

c) El croquis de una pieza metálica, realizado a escala 10:1, mide 15 cm de longitud ¿Cuál es la longitud real de la pieza?

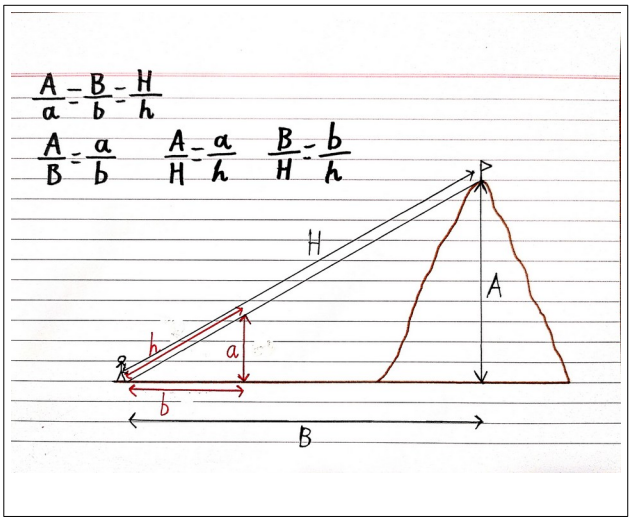
d) El croquis de otra pieza, esta vez realizado a escala 20:1, mide 8 cm ¿Cuál es la longitud real de esta pieza?

Teorema de Tales

Dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos pero distinto tamaño.

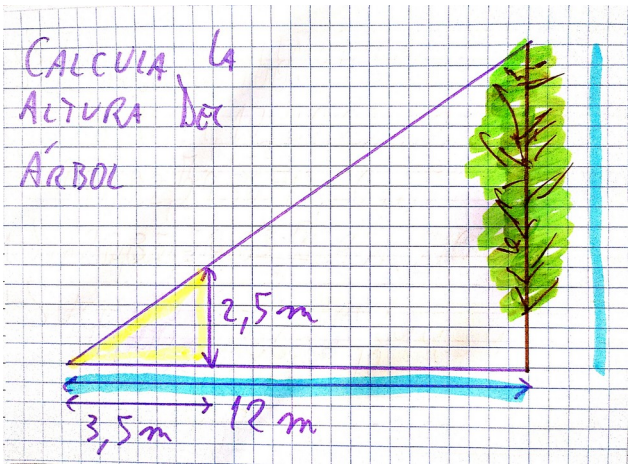


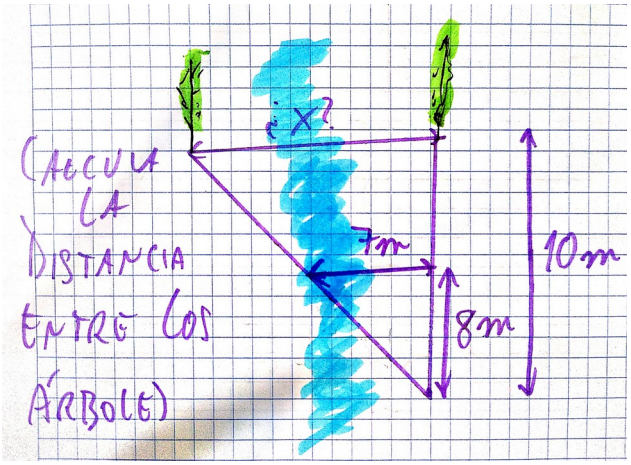
Según el **teorema de Tales si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.** Esto puede servirnos para calcular distancias imposibles de medir directamente.

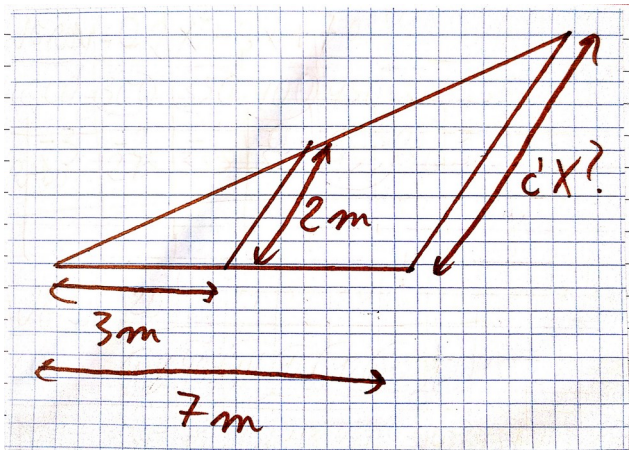


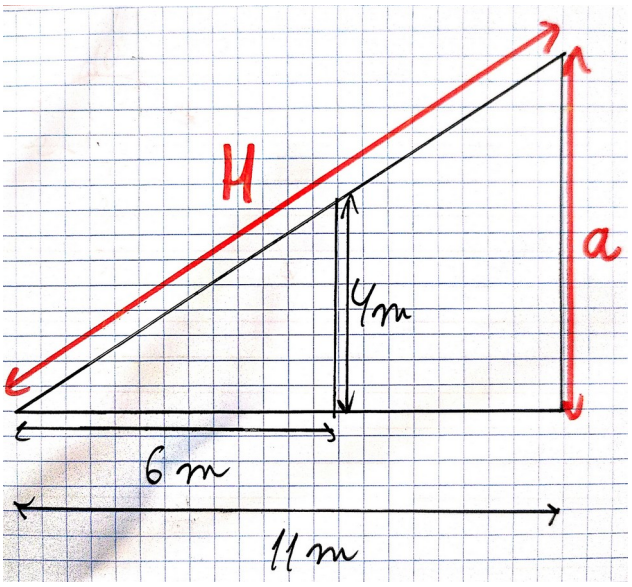
Actividades

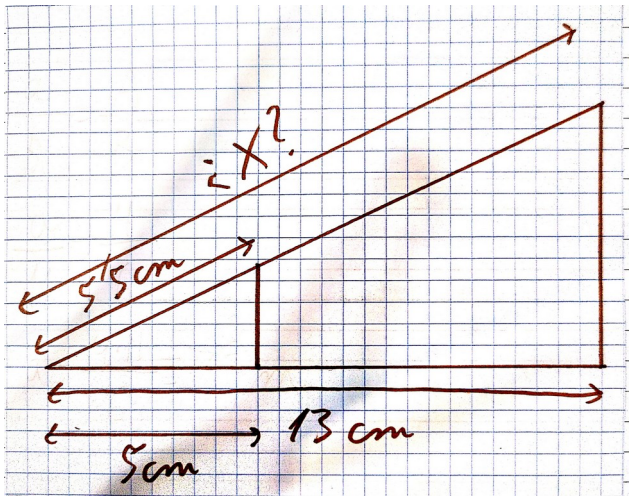
Calcula la distancia incógnita en cada uno de los siguientes problemas:

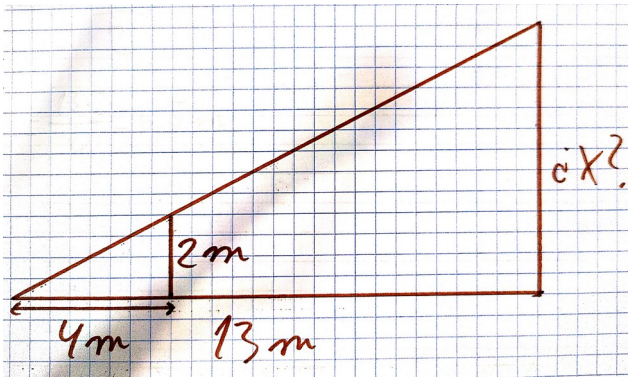


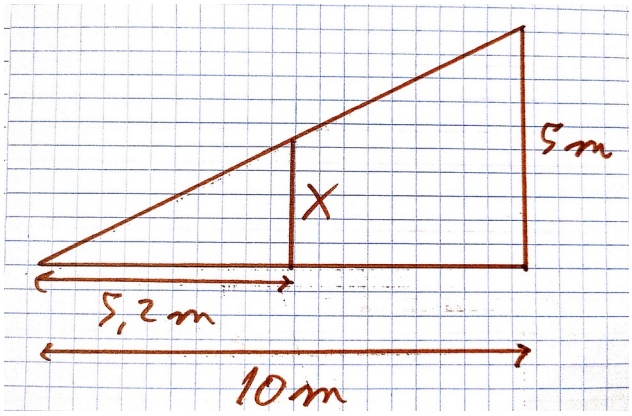

CALCULA LA DISTANCIA ENTRE LOS ÁRBOLES
¿X?
7m
8m
10m

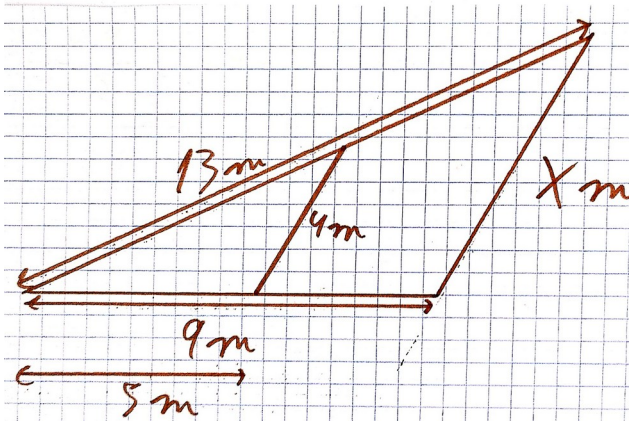

2m
¿X?
3m
7m


H
a
4m
6m
11m


¿X?
5,5cm
5cm
13cm


¿X?
2m
4m
13m


5m
X
5,2m
10m



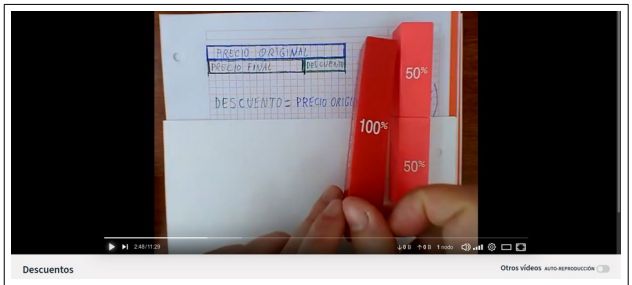
Porcentajes

Un porcentaje o tanto por ciento es una proporción que indica cuantas partes de un total de cien estamos considerando.

$$Porcentaje = \frac{Parte}{Total} \cdot 100$$

Este concepto es aplicable, por ejemplo, a descuentos o a impuestos como el IVA.

Descuentos



Calcular un descuento es sencillo.

1. A un calendario de 10.95 € se le aplica, al comenzar el año, un descuento del 40% ¿A qué precio se vende entonces?
2. Un vestido de 49.95 € se vende en rebajas por 37.46 € ¿Qué porcentaje de descuento se le ha aplicado?
3. Un chaleco cuesta, con una rebaja del 30%, 31,85 € ¿Cuál era su precio antes de las rebajas?
4. Una toalla ha pasado de tener un precio de 29.95 € a 20.97 € ¿Qué porcentaje de rebaja se le ha aplicado?

IVA

El IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido) es un impuesto al consumo de bienes y servicios. Se trata, como los demás impuestos, de un mecanismo de redistribución de la riqueza.

Actualmente hay varios tipos de IVA. Algunos de los más habituales son los siguientes:

- General: 21%.
- Reducido: 10%. Se aplica a **productos y servicios considerados como necesarios**[17], tales como alimentos, agua, compra de vivienda nueva,

17 Existe una fuerte discusión sobre que productos deben ser considerados "necesarios" o, incluso, "de primera necesidad".

productos farmacéuticos (no medicamentos), productos de uso profesional para agricultura y ganadería, asistencia a ferias, exposiciones, museos y algunos espectáculos deportivos, transporte de viajeros, hostelería, limpieza de vías públicas, gestión de residuos, reparación de viviendas, etc.

- Superreducido: 4%. Se aplica a **productos de primera necesidad** tales como pan, leche, queso, huevos, fruta, verduras y hortalizas, legumbres y tubérculos, medicamentos para uso humano, vehículos para minusválidos, sillas de ruedas, prótesis e implantes, viviendas de protección oficial, libros, revistas y periódicos.

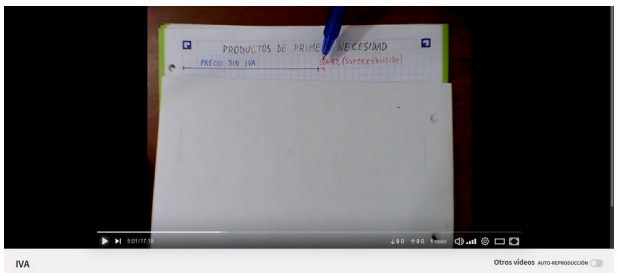
	Precio sin impuesto	IVA repercutido (21%)	Precio de venta	IVA soportado	IVA a ingresar
Materias primas	100	21	121	0	21 - 0 = 21
Transformación	200	42	242	21	42 - 21 = 21
Mayorista	400	84	484	42	84 - 42 = 42
Venta por minorista	500	105	605	84	105 - 84 = 21
				TOTAL	**105**

Cada uno de los empresarios ha soportado el impuesto que le ha sido repercutido por su proveedor, siendo esta cuota la cantidad que pueden deducir al presentar sus correspondientes autoliquidaciones del IVA.

La repercusión final, es decir, el impuesto pagado por el consumidor final en concepto de IVA, ha sido 105 euros, que proviene de multiplicar el precio final del producto, 500 euros, por el tipo impositivo del 21%. Este impuesto ha sido ingresado en la Hacienda Pública poco a poco por cada empresario o profesional en función del valor añadido al bien o servicio en su concreta fase de producción y distribución.

Ejemplo de pago del IVA (Manual práctico del IVA 2018, Ministerio de Hacienda).

El IVA es pagado por el consumidor final, pero ingresado en las arcas públicas por cada una de las empresas implicadas en la cadena por la que el bien o servicio en cuestión ha llegado hasta el consumidor.



Hasta hace poco había tres tipos de IVA. Ahora ha cambiado el sistema, pero el concepto sigue siendo el mismo.

Actividades

1. Si el precio antes de IVA de una bufanda es de 10 € ¿Cuánto pagaremos de IVA al comprarla?
2. Si el precio de una cantidad de naranjas, antes de IVA, es de 10 € ¿Cuánto pagaremos de IVA al comprarlas?
3. Por una camiseta de algodón pagamos 24.90 € ¿Cuál es el precio de la camiseta sin IVA y cuanto estamos pagando de IVA?
4. Resuelve el ejercicio anterior para una camiseta de 18.50 € y para una de 29.90 €, para una agenda de 12,95 € y un calendario de 10.95 €

5. Resuelve el ejercicio anterior para una cesta de Navidad formada por chocolates, café, galletas, infusiones y otros productos de comercio justo por un precio final de 29.99 €.
6. Si por una barra de pan para bocadillo pagamos 0.19 € ¿Cuánto estamos pagando de IVA?
7. Resuelve el problema anterior suponiendo que hemos comprado un kg de pepinos por 1.29 €
8. ¿Y si compramos una tarta laminada con chocolate por 0.99 €? ¿Cuánto pagamos de IVA? ¿Y por 1.49 € de profiteroles?¿Y por un sorbete de café de 2.99 €?

Mas ejemplos de IVA y descuentos:



Más ejemplos de IVA y descuentos:



Más ejemplos de IVA y descuentos:



Más ejemplos de IVA y descuentos:





Puedes encontrar una gran cantidad de ejemplos reales revisando los tickets y facturas de **La zona comercial**.

Otros



2010. Con 450 litros de agua hemos regado durante 9 días 10 árboles de una forma eficiente, y al 70% de ellos se les ha aplicado una cura con un coste total de 55 euros. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántos litros de agua ha necesitado cada árbol diariamente?

b) ¿Con 900 litros de agua cuántos días podríamos regar 5 árboles?

c) ¿Cuántos árboles podríamos regar con 1800 litros de agua durante 12 días?

d) Calcular el coste de la cura por cada árbol y redondearlo a dos cifras decimales.

ÁLGEBRA

Polinomios

Los polinomios son expresiones formadas por la suma o resta de varios monomios. Su valor dependerá del valor de una o varias variables.

Ejemplo: $P(x)=4x^2-3x+5$

En este polinomio, si x=2, entonces:

$P(x)=4\cdot 2^2-3\cdot 2+5=16-6+5=15$

Suma y resta de polinomios

Los polinomios se pueden sumar o restar, pero teniendo en cuenta que solo se suman o restan los monomios semejantes (aquellos que tienen la misma parte literal).

Ejemplo: si tenemos dos polinomios P(x) y Q(x)

$P(x)=4x^2-3x+5$

$Q(x)=6x^3-5x+8$

Entonces

$P(x)+Q(x)=4x^2-3x+5+6x^3-5x+8=$

$=6x^3+4x^2-8x+13$

$P(x)-Q(x)=4x^2-3x+5-(6x^3-5x+8)=$

$=4x^2-3x+5-(6x^3-5x+8)=$

$=4x^2-3x+5-6x^3+5x-8=-6x^3+4x^2+2x-3$

Más ejemplos:



Al-Juarismi (780-850), matemático persa, "padre" del álgebra e introductor del uso de números arábigos (Imagen: dominio público).

Su obra ***Compendio de cálculo por compleción*** *y comparación* fue usado como libro de texto en las universidades europeas hasta el siglo XVI.

Actualmente se conoce como ***álgebra*** a esa área matemática. Otro tanto puede decirse de su obra ***Libro de la suma y de la resta, según el cálculo indio***, que introdujo en Europa el uso de números arábigos en lugar de los números romano. Las palabras ***álgebra***, ***guarismo*** y ***algoritmo*** proceden del nombre de *Al-Juarismi*.

Producto de polinomios

Los polinomios se pueden multiplicar, teniendo en cuenta que cada monomio de un polinomio deberá multiplicar a cada monomio del otro polinomio.

Ejemplo: si tenemos dos polinomios P(x) y Q(x)

$P(x)=4x^2-3x+5$

$Q(x)=6x^3-5x+8$

Entonces

$P(x)\cdot Q(x)=(4x^2-3x+5)\cdot(6x^3-5x+8)=$

$=4x^2\cdot(6x^3-5x+8)-3x\cdot(6x^3-5x+8)+5\cdot(6x^3-5x+8)=$

$=24x^5-20x^3+32x^2-18x^4+15x^2-24x+30x^3-25x+40=$

$=24x^5-18x^4+10x^3+47x^2-49x+40$

Factorización de polinomios

Para dividir polinomios o resolver ecuaciones, en ocasiones, es conveniente factorizar polinomios o, lo que es lo mismo: convertir un polinomio en un producto de factores. Para conseguir esto se pueden usar varias técnicas.

a)Extraccion de factor común

Ejemplo:

$8x^3-6x^2+10x=2x\cdot(4x^2-3x+5)$

b)Identificación con igualdades notables

Si el polinomio tiene una estructura análoga a alguna de las siguientes sumas puede, inmediantamente, transformarse en el producto equivalente:

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

Ejemplos:

$4x^2+20x+25=(2x)^2+2\cdot2x\cdot5+5^2=(2x+5)^2$

$4x^2-20x+25=(2x)^2-2\cdot2x\cdot5+5^2=(2x-5)^2$

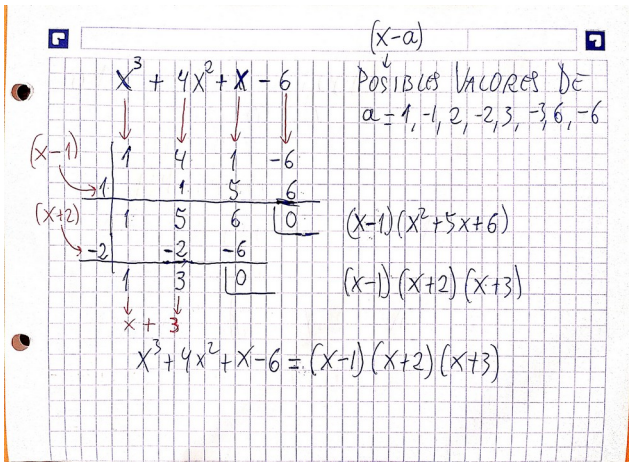
$4x^2-25=(2x)^2-5^2=(2x+5)\cdot(2x-5)$

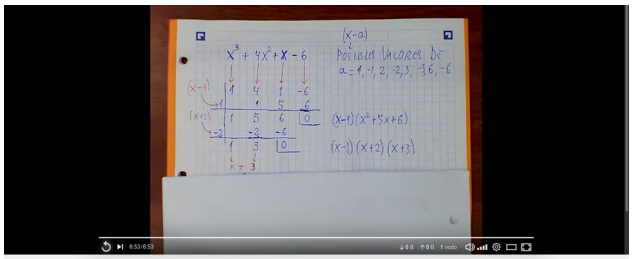
c)Regla de Ruffini

La regla o algoritmo de Ruffini es un procedimiento sencillo para dividir un polinomio entre un binomio cuya forma sea **x-a**, siendo a un número entero.

Para factorizar buscamos que la división sea exacta, con resto igual a cero. Para eso solo podremos utilizar valores de a que sean divisores exactos del término idenpendiente del polinomio (el coeficiente que no va acompañado por ninguna x ni ninguna otra variable).

Ejemplo: queremos factorizar el polinomio x^3+4x^2+x-6. El término independiente es 6, lo que nos indica que en el binomio x-a **a** solo puede tener valores como los divisores enteros de 6: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6.





Factorizando mediante la regla de Ruffini llegamos a la conclusión de que

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$.

Actividades

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^3+x^2-4x-4$

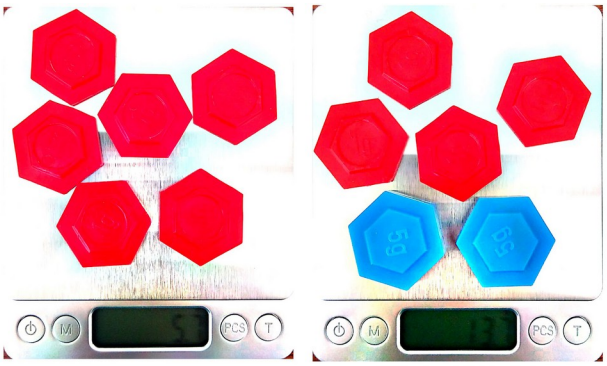
b) $Q(x)=2x^3-6x^2-8x+24$

c) $R(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

d) $S(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$

e) $T(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$

Ecuaciones de primer grado



Seis fichas rojas suman 5.7 g. Cuatro fichas rojas y dos azules suman 13.7 g. Calcula la masa de una ficha roja y de una ficha azul.

Las ecuaciones son expresiones algebraicas que representan igualdades entre dos funciones. Se resuelven hallando el valor de una o varias incógnitas que hacen que esa igualdad sea posible. El grado de una ecuación indica el máximo exponente al que está elevada la incógnita.

Las ecuaciones de primer grado, en general, tendrán una forma similar a la siguiente:

$$ax+b=cx+d$$

Expresión en la que *x* será la incógnita que buscamos[18] y *a*, *b*, *c* y *d* coeficientes cuyos valores ya conocemos. No hay un camino fijo para resolver ecuaciones de primer grado, pero lo más habitual es agrupar todos los monomios que contengan a la variable en el primer miembro de la ecuación (lado izquierdo de la igualdad), y los que no lo tengan en el segundo miembro (lado derecho).

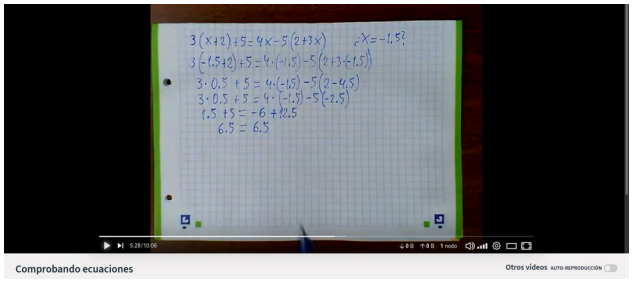


Resolver una ecuación de primer grado es parecido a resolver un rompecabezas. Basta con usar la lógica.

Algunos ejemplos:



¡CUIDADO! Mucho alumnado escribe y resuelve las ecuaciones de forma descuidada, llegando a escribir expresiones matemáticamente incorrectas con la pretensión de que "se entienden". LAS ECUACIONES O ESTÁN BIEN ESCRITAS O ESTÁN MAL ESCRITAS. No hay término medio.



Una vez que creemos tener la solución de una ecuación es sencillo comprobar si dicha solución es correcta.

Actividades

a) 4x+5=7
b) 2x-4=-6x+8
c) 300+5x=275+6x
d) 2x+3=4x+6
e) 2x+3=2x+4
f) 3(x+2)+5=4x-5(2+3x)
g) 2x+3=2x+5-2
h) -3(2x+5)+4(3x -6)=2(7 -x)
i) 2x+3(4x+5)=-6(2x-3)+2

18 Obsérvese que **la incógnita está elevada al exponente "1" (por eso es una ecuación de primer grado)**, solo que el exponente "1" nunca se representa.

j) 5x+6(4x-2)=-3x-4(7-x)

k) 2x+3(4x+5)=6(5x-4)+3x

l) -2(-5+3x)+4x=2(-4x -8)+3x

m) 4(3x+2)+32=8(x-2)

n) -3(2 -5x)+6x=4x -2(6x -8)

o) 2x+3(2x-6)=7(2-x)+10x

p) x-2(3x-4)+5=6x-7(8-3x)

q) 2x-3(x-2)+4=5x-6(2+x)

r) 3(x-2)-4x=5x+6(8-x)

s) 4(2-x)+x=8x+2(3x-5)

Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado[19], en general, tienen la forma siguiente:

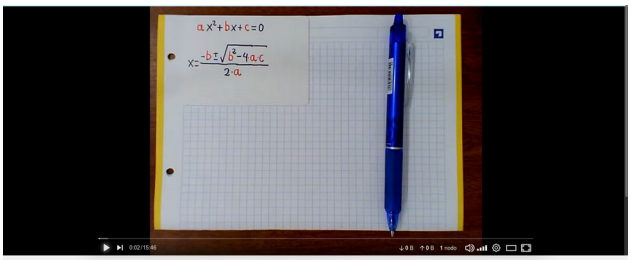
$$a\,x^2+bx+c=0$$

Siendo la solución la siguiente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a}$$

19 Obsérvese que, en estas ecuaciones, **la incógnita aparece elevada al cuadrado (por eso son de segundo grado).**

Nótese que, en general, una ecuación de segundo grado tendrá dos soluciones[20]: una con el valor positivo de la raíz y otra con el negativo.



Para resolver ecuaciones de segundo grado completas hace falta saber aplicar la fórmula.



Cuando *b=0* o *c=0* esta fórmula no es necesaria.

Si *b=0*, entonces:



$ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$$x^2=\frac{-c}{a}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Y, si *c=0*, entonces:

$ax^2+bx=0$

$(ax+b)x=0$

20 No siempre: podría ocurrir, incluso, que no tuviese ninguna solución. En algunos casos b^2-4ac resulta ser un número negativo, en cuyo caso su raíz no tendrá solución dentro del conjunto de los números reales (en la mayoría de los problemas eso suele significar que no tiene solución).

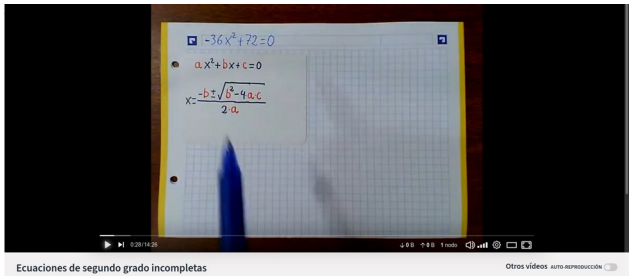
Y, si el producto de los factores ***(ax+b)*** y ***x*** es igual a ***0***, entonces las soluciones posibles son:

PRIMERA SOLUCIÓN: ***ax+b=0***

$ax=-b$

$$x=\frac{-b}{a}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: ***x=0***



Actividades

a) $x^2-5x-14=0$

b) $3x^2+9x-30=0$

c) $x^2-x-12=0$

d) $-5x^2+45x-100=0$

e) $x^2+3x+2=0$

f) $x^2-2x-15=0$

g) $2x^2+6x+4=0$

h) $3x^2-15x+18=0$

i) $-4x^2+4x+48=0$

j) $x^2+2x-15=0$

k) $x^2-16x+48=0$

l) $3x^2+6x-45=0$

m) $2x^2+10x-168=0$

n) $3x^2+3x-18=0$

o) $4(3x^2+2x)+32=8x(x-2)$

p) $18x^2-3(2x-60)=12x^2+360$

q) $6x^2+8(x+1)=5x^2+3x+2$

r) $x(x-3)=-2(x-3)$

s) $x(x-2)=2-x$

t) $x(x+5)=4(x+5)$

u) $x(6x+21)=-18(2x+7)$

v) $8x+x(x-3)=4(7+2x)$

w) $4x+x(x+4)=(8+x)\cdot 4$

x) $-36x^2+72=0$

y) $12x^2-48=0$

z) $-8x^2+42x=0$

aa) $4x^2-5x=0$

ab) $5x^2-20x=0$

ac) $8x^2-128=0$

ad) $4x^2-400=0$

2022. Dado el polinomio $P(x)=-x^3+2x^2+5x-6$, realizar las siguientes cuestiones:

a) Grado del polinomio que se obtiene al multiplicar **P(x)** por x^2.

b) Soluciones de la ecuación para **P(x)=0**.

c) Descomposición factorial del polinomio **P(x)**.

d) Valor numérico del polinomio **P(x)** para **x=-4**.

2021. Dado el polinomio $P(x)=2x^3-4x^2-10x+12$:

a) Obtener la descomposición factorial del polinomio.

b) Calcular el valor numérico para x=-3.

c) Calcula el número de hijos de una familia sabiendo que es igual a la suma las raíces de dicho polinomio.

2018. Dado el polinomio $P(x)=x^3+x^2-4x-4$, realizar las siguientes cuestiones:

a) Descomposición factorial del polinomio.

b) Resolver la ecuación P(x) =0

c) Calcular el valor numérico del polinomio para x= -3/2

2016. Calcular el número de hermanos de una familia sabiendo que es igual a la suma de las soluciones de la ecuación $2x^3-6x^2-8x+24=0$

2015. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

b) $\sqrt{4x+8}-x=3$

2014. Dado el polinomio $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$.

a) Descompón en factores P(x).

b) Resuelve la ecuación P(x)=0.

2009. Dado el polinomio $P(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$, realiza las siguientes cuestiones:

a) Descomposición factorial del polinomio.

b) Resuelve la ecuación P(x)=0

Septiembre de 2008. Descompón en factores el polinomio $P(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ y resuelve la ecuación P(x) = 0.

CC-By 4.0 Ángel Vázquez Hernández 2024

Usted es libre de:

- **Compartir** – copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato
- **Adaptar** – remezclar, transformar y crear a partir del material para cualquier finalidad, incluso comercial.

El licenciador no puede revocar estas libertades mientras cumpla con los términos de la licencia.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** – Debe reconocer adecuadamente la autoría, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de una manera que sugiera que tiene el apoyo del licenciador o lo recibe por el uso que hace.
- **No hay restricciones adicionales** – No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas que legalmente restrinjan realizar aquello que la licencia permite.

Avisos:

- No tiene que cumplir con la licencia para aquellos elementos del material en el dominio público o cuando su utilización esté permitida por la aplicación de una excepción o un límite.

  Los derechos de los usuarios bajo los límites o las excepciones, como el uso justo o el trato justo, no quedan afectados por las licencias CC.

  Más información.

- No se dan garantías. La licencia puede no ofrecer todos los permisos necesarios para la utilización prevista. Por ejemplo, otros derechos como los de publicidad, privacidad, o los derechos morales pueden limitar el uso del material.