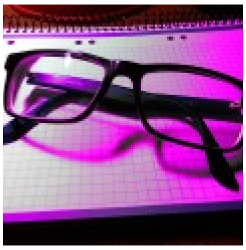
ÁLGEBRA



Proyecto STEAM

(Diseño de Inma P.nitas)

La Agenda 2030 establece la Educación de Calidad como uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible.

Bienvenida, bienvenido o bienvenide al Módulo III del Ámbito Científico Tecnológico de ESPA.

¿Qué tal se te dan las funciones y las ecuaciones?

Ya, bueno. **No te preocupes.**

Cuando empecemos a estudiar el movimiento vas a necesitar algunos conocimientos de álgebra (y no será la última vez que te hagan falta). En esta situación de aprendizaje vas a aprender **cómo representar funciones y cómo resolver problemas sencillos mediante ecuaciones.**

Sumario

FUNCIONES

Al-Juarismi (780-850), matemático persa, "padre" del álgebra e introductor del uso de números arábigos ([Imagen: dominio público](#)).

Su obra ***Compendio de cálculo por compleción y comparación*** fue usado como libro de texto en las universidades europeas hasta el siglo XVI. Actualmente se conoce como ***álgebra*** a esa área matemática. Otro tanto puede decirse de su obra ***Libro de la suma y de la resta, según el cálculo indio***, que introdujo en Europa el uso de números arábigos en lugar de los números romano.

Las palabras ***álgebra***, ***guarismo*** y ***algoritmo*** proceden del nombre de *Al-Juarismi.*

Una función es una relación entre **una o varias variables independientes** y **una variable dependiente** (cuyo valor **depende de las variables independientes**).

Ejemplos:

- En la función

x=f(a, b, c, d, e,...)

x sería la variable dependiente

a, b, c, d, e,... serían las variables independientes

En la función

$$x=4y^2+5zt-8t^3-\frac{1}{z}+y$$

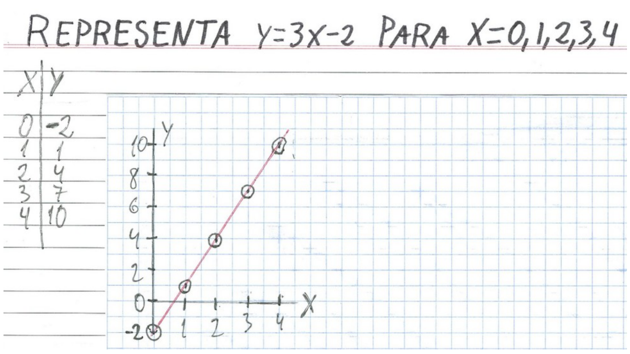
x sería la variable dependiente

y, z, t serían las variables independientes

Representación de funciones

Las funciones pueden representarse de tres formas: mediante una expresión algebraica (una fórmula), mediante una tabla de datos o mediante una gráfica.

Ejemplo:

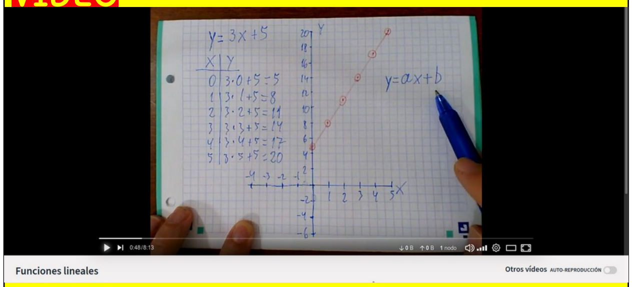


¡CUIDADO! Hay unas normas básicas que hay que cumplir y que suelen ser ignoradas por el alumnado principiante:

- Si conocemos las unidades de las variables estas deben ser indicadas, tanto en la tabla como en la gráfica.
- La variable independiente se escribe en la columna izquierda de la tabla (o en la parte superior, si es una tabla horizontal), y la dependiente a la derecha (o en la fila inferior, si la tabla es horizontal).
- La variable independiente se representa en el eje horizontal[1] de la gráfica, y la variable dependiente en el eje vertical[2].
- Dentro de un mismo eje todos los segmentos deben tener igual longitud[34].
- El "0" es un valor real[5].
- No siempre la variable independiente es "x" y la dependiente es "y"[6].

Actividades

VÍDEO



[Representar funciones lineales es sencillo.](#)

a) [Representa gráficamente la función *y=4x+7* para valores de *x* igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.](#)

b) [Representa *y=-5x+20* para *x*=0, 1, 2, 3, 4, 5.](#)

c) [Representa la función *y=4x+7* para *x*=0, 2, 4, 6, 8, 10.](#)

d) [La velocidad de un objeto es *v=300-9.8t*. Representa *v* para *t*=0,10,20,30,40,50 y 60 s. *v* está en m/s y *t* en s.](#)

1 Eje horizontal: el que va de izquierda a derecha.
2 Eje vertical: el que va de arriba a abajo.
3 Es un error habitual entre novatos construir los segmentos "a ojo": utiliza la cuadrícula del papel para trabajar correctamente.
4 Salvo que estemos utilizando escalas logarítmicas, cosa que no vamos a hacer en este curso por su complejidad.
5 Por alguna razón muchos novatos tienden a "saltarse" el valor "0" al construir un eje, representando los números enteros como, por ejemplo -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,... Pero el "0" es un valor real que debe ser representado entre los valores negativos y positivos.
6 Mucho alumnado aprende a representar funciones genéricas en las que la variable independiente es "x" y la dependiente es "y", y se empeñan en escribir "x" e "y" en todas las funciones que se encuentran posteriormente. Pero en la vida real las variables tienen otros nombres y símbolos.

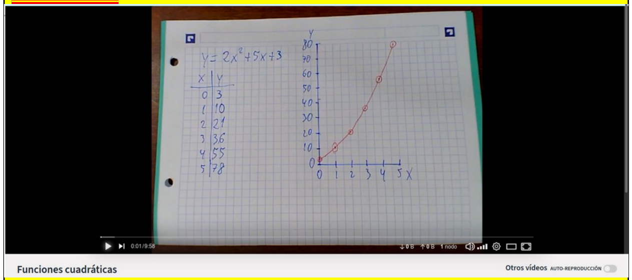
e) La posición de un objeto, en metros, viene dada por la fórmula $x=50-2\cdot t$. Representa el movimiento en una gráfica para $t=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$ y 14 s. La x se indica en m.

f) Si lanzamos hacia arriba, a 200 m/s, una piedra su velocidad variará según $v=200-9.8\cdot t$. Representa la gráfica para $t=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ y 40 s.

g) La posición de un objeto varía con la fórmula $x=80-10t$, donde x está en m y t en s. Representa la gráfica x-t para los 100 primeros segundos.

h) El agua de un cazo está, inicialmente, a 20ºC. Se calienta 2ºC cada minuto. Representa su calentamiento durante 20 minutos.

VÍDEO



Inténtalo ahora con funciones cuadráticas.

i) Representa $y=-x^2+30x+64$ para $x=0, 10, 20, 30, 40$ y 50.

j) Representa la función $y=3x^2+5x+7$ para $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.

k) Representa el índice de audiencia de un programa de televisión si varía con el tiempo t, en min, durante 30 min según $y(t)=-t^2+30t+64$.

l) Representa el índice de audiencia de un programa de radio de 15 min, si varía con el tiempo t, en min, según $y(t)=-t^2+18t+19$.

m) Representa la temperatura *T*, en ºC, si varía con el tiempo *t*, en min, según la función *T=80t-t²* durante 1 h.

n) Representa el volumen de agua de un depósito *V*, en l, si varía con el tiempo *t*, en min, durante 30 min según *V(t)=t²-40t+450*.

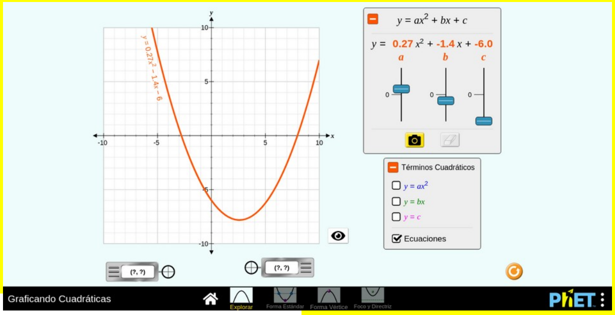
o) La posición de una piedra es *x=200t-4.9t²*, donde *x* está en metros y *t* en segundos. Representa para *t*=0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 40 s.

p) Un objeto lanzado hacia arriba tiene una posición, en metros, *x=300t-4.9t²*. Representa para *t*=0, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 s.

q) Los litros de agua de un depósito varían según la fórmula *V=300+100t-5t²*, donde *t* está en segundos. Representa una gráfica *V-t* para los primeros 20 segundos.

r) La posición de un objeto que lanzamos hacia arriba viene dada por la fórmula *x=10+100t-4.9t²*, donde *x* está en metros y *t* en segundos. Representa el movimiento para t=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16 s.

SIMULACIÓN DIGITAL



(Imagen: Graficando cuadráticas, CC-By PhET Interactive Simulations University of Colorado Boulder https://phet.colorado.edu)

ECUACIONES

Ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones son expresiones algebraicas que representan igualdades entre dos funciones. Se resuelven hallando el valor de una o varias incógnitas que hacen que esa igualdad sea posible. El grado de una ecuación indica el máximo exponente al que está elevada la incógnita.

Las ecuaciones de primer grado, en general, tendrán una forma similar a la siguiente:

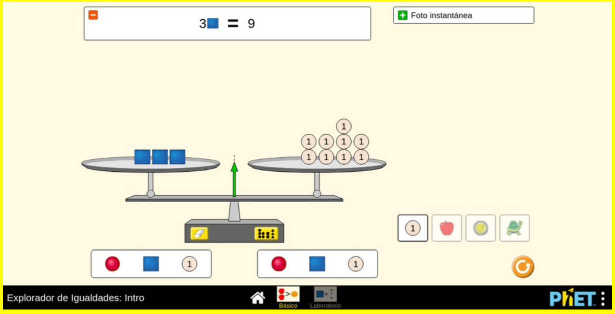
$$ax+b=cx+d$$

Expresión en la que *x* será la incógnita que buscamos[7] y *a*, *b*, *c* y *d* coeficientes cuyos valores ya conocemos.

7 Obsérvese que **la incógnita está elevada al exponente "1" (por eso es una ecuación de primer grado)**, solo que el exponente "1" nunca se representa.

No hay un camino fijo para resolver ecuaciones de primer grado, pero lo más habitual es agrupar todos los monomios que contengan a la variable en el primer miembro de la ecuación (lado izquierdo de la igualdad), y los que no lo tengan en el segundo miembro (lado derecho).

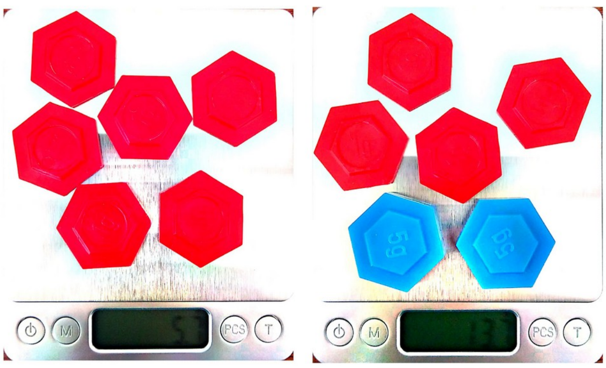
SIMULACIÓN DIGITAL



Calcula el valor de un cuadrado.

(Imagen: Explorador de igualdades: intro, CC-By PhET Interactive Simulations University of Colorado Boulder

https://phet.colorado.edu)



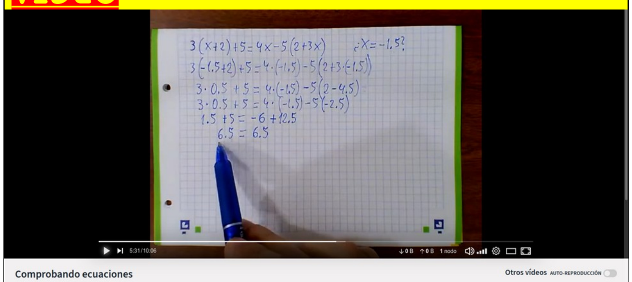
Seis fichas rojas suman 5.7 g. Cuatro fichas rojas y dos azules suman 13.7 g. Calcula la masa de una ficha roja y de una ficha azul.

VÍDEO

Resolver una ecuación de primer grado es parecido a resolver un rompecabezas.

¡CUIDADO! Mucho alumnado escribe y resuelve las ecuaciones de forma descuidada, llegando a escribir expresiones matemáticamente incorrectas con la pretensión de que "se entienden". LAS ECUACIONES O ESTÁN BIEN ESCRITAS O ESTÁN MAL ESCRITAS. No hay término medio.

VÍDEO



Una vez que creemos tener la solución de una ecuación es sencillo comprobar si dicha solución es correcta.

Actividades

a) 4x+5=7

b) 2x-4=-6x+8

c) 300+5x=275+6x

d) 2x+3=4x+6

e) 2x+3=2x+4

f) 3(x+2)+5=4x-5(2+3x)

g) 2x+3=2x+5-2

h) -3(2x+5)+4(3x -6)=2(7 -x)

i) 2x+3(4x+5)=-6(2x-3)+2

j) 5x+6(4x-2)=-3x-4(7-x)

k) 2x+3(4x+5)=6(5x-4)+3x

l) -2(-5+3x)+4x=2(-4x -8)+3x

m) 4(3x+2)+32=8(x-2)

n) -3(2 -5x)+6x=4x -2(6x -8)

o) 2x+3(2x-6)=7(2-x)+10x

p) x-2(3x-4)+5=6x-7(8-3x)

q) 2x-3(x-2)+4=5x-6(2+x)

r) 3(x-2)-4x=5x+6(8-x)

s) 4(2-x)+x=8x+2(3x-5)

Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado[8], en general, tienen la forma siguiente:

$$ax^2+bx+c=0$$

Si dividimos la anterior expresión entre a , entonces:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$, de donde

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

Si añadimos a ambos miembros de la ecuación el término $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ entonces:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2+x^2+\frac{b}{a}x=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$, expresión que podemos simplificar como:

$$\left(\frac{b}{2a}+x\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$$

Si hacemos la raíz cuadrada en ambos miembros, entonces:

$$\frac{b}{2a}+x=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}}$$

$$\frac{b}{2a}+x=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\frac{b}{2a}+x=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

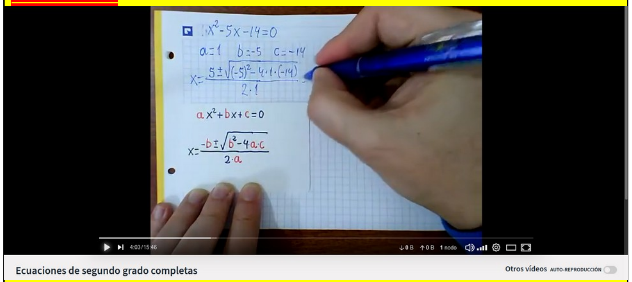
Y, finalmente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8 Obsérvese que, en estas ecuaciones, **la incógnita aparece elevada al cuadrado (por eso son de segundo grado).**

Nótese que, en general, una ecuación de segundo grado tendrá dos soluciones[9]: una con el valor positivo de la raíz y otra con el negativo.

VÍDEO



Para resolver ecuaciones de segundo grado completas hace falta saber aplicar la fórmula.

a) $x^2-5x-14=0$

b) $3x^2+9x-30=0$

c) $x^2-x-12=0$

d) $-5x^2+45x-100=0$

9 No siempre: podría ocurrir, incluso, que no tuviese ninguna solución. En algunos casos b^2-4ac resulta ser un número negativo, en cuyo caso su raíz no tendrá solución dentro del conjunto de los números reales (en la mayoría de los problemas eso suele significar que no tiene solución).

e) $x^2+3x+2=0$

f) $x^2-2x-15=0$

g) $2x^2+6x+4=0$

h) $3x^2-15x+18=0$

i) $-4x^2+4x+48=0$

j) $x^2+2x-15=0$

k) $x^2-16x+48=0$

l) $3x^2+6x-45=0$

m) $2x^2+10x-168=0$

n) $3x^2+3x-18=0$

o) $4(3x^2+2x)+32=8x(x-2)$

p) $18x^2-3(2x-60)=12x^2+360$

q) $6x^2+8(x+1)=5x^2+3x+2$

r) $x(x-3)=-2(x-3)$

s) $x(x-2)=2-x$

t) $x(x+5)=4(x+5)$

u) $x(6x+21)=-18(2x+7)$

v) $8x+x(x-3)=4(7+2x)$

w) $4x+x(x+4)=(8+x)\cdot 4$

Cuando $b=0$ o $c=0$ esta fórmula no es necesaria.

Si $b=0$, entonces:

$ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$$x^2=\frac{-c}{a} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Y, si $c=0$, entonces:

$ax^2+bx=0$

$(ax+b)x=0$

Y, si el producto de los factores $(ax+b)$ y x es igual a 0, entonces las soluciones posibles son:

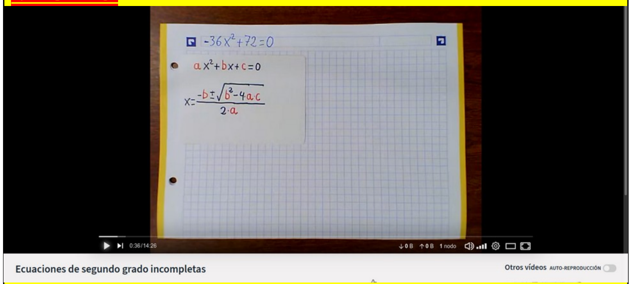
PRIMERA SOLUCIÓN: ***ax+b=0***

ax=-b

$$x=\frac{-b}{a}$$

SEGUNDA SOLUCIÓN: ***x=0***

VÍDEO



Intenta ahora resolver algunas ecuaciones de segundo grado incompletas.

x) $-36x^2+72=0$

y) $12x^2-48=0$

z) $-8x^2+42x=0$

aa) $4x^2-5x=0$

ab) $5x^2-20x=0$

ac) $8x^2-128=0$

ad) $4x^2-400=0$

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de varias incógnitas con soluciones comunes a todas. Aunque no son los únicos, suelen enseñarse tres métodos clásicos para su resolución: sustitución, igualación y reducción.

Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables **de una ecuación** y sustituirla **en otra ecuación.**

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ -2x+3y=6 \end{array}\right\}$$ Si despejamos la ***x*** de la primera ecuación obtenemos ***x*=-2*y*+4**.

Si, a continuación, sustituimos ese valor de ***x*** en la segunda ecuación el resultado es el siguiente:

$-2 \quad x \quad +3y=6$

$-2(\mathbf{-2y+4})+3y=6$

$4y-8 \;+3y=6$

$4y \quad +3y=6+8$

$7y=14$

De donde deducimos que $y=\frac{14}{7}=2$

Una vez calculado el valor de ***y*** procedemos a calcular el de ***x***:

$x=-2y+4$

$x=-2\cdot 2+4=0$

Igualación

El método de igualación consiste en **despejar una misma incógnita de dos ecuaciones distintas** e igualar las expresiones resultantes.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ -2x+3y=6 \end{array}\right\}$$ Si despejamos la ***x*** de las dos ecuaciones obtenemos

$$x=-2y+4$$

$$x=\frac{6-3y}{-2}$$

Si igualamos ambos valores de *x* obtenemos la siguiente ecuación:

$$-2y+4=\frac{6-3y}{-2}$$

-2(-2*y*+4)=6 -3*y*

4*y*-8=6-3*y*

4*y*+3*y*=6+8

7*y*=14

De donde deducimos que $y=\frac{14}{7}=2$

Una vez calculado el valor de ***y*** procedemos a calcular el de ***x***:

x=-2*y* +4

x=-2·2+4=0

Reducción

El método de reducción consiste en **restar (o sumar) una ecuación a otra.**

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ -2x+3y=6 \end{array}\right\}$$ Si multiplicamos la primera ecuación por "2" en sus dos miembros obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y=8 \\ -2x+3y=6 \end{array}\right\}$$ Si ahora sumamos ambas ecuaciones el resultado es una ecuación de una sola incógnita:

2*x*-2*x*+4*y*+3*y*=8+6

7y=14

De donde deducimos que $y=\frac{14}{7}=2$

Una vez obtenido el valor ***y*=2** basta con sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones iniciales para despejar el valor de ***x***:

x+2y=4

x+2·2=4

x+4=4

x=4-4=0

A veces también funciona dividir una ecuación entre otra en lugar de sumarlas o restarlas si, previamente, hemos dejado una de las incógnitas a un mismo lado en cada ecuación.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ -2x+3y=6 \end{array}\right\}$$ Si dejamos la *x* de las dos ecuaciones a la izquierda obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x=4-2y \\ -2x=6-3y \end{array}\right\}$$ Si, ahora, dividimos la segunda ecuación entre la primera obtenemos lo siguiente:

$$\frac{-2x}{x}=\frac{6-3y}{4-2y}$$

$$-2=\frac{6-3y}{4-2y}$$

-2(4-2*y*)=6-3*y*

-8+4*y*=6-3*y*

4*y*+3*y*=6+8

7*y*=14

De donde deducimos que $y=\frac{14}{7}=2$

Una vez obtenido el valor ***y=2*** basta con sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones iniciales para despejar el valor de ***x***:

x+2y=4

x+2·2=4

x+4=4

x=4-4=0

Actividades

a) $\left.\begin{array}{r}2x-4y=8\\-10x+6y=-4\end{array}\right\}$ (solución)

b) $\left.\begin{array}{r}4x-5y=6\\-7x+8y=9\end{array}\right\}$

(solución)

c) $\left.\begin{array}{r}-x+2y=3\\-4x+5y=6\end{array}\right\}$ (solución)

d) $\left.\begin{array}{r}4x+5y=8\\3x-2y=12\end{array}\right\}$ (solución)

e) $\left.\begin{array}{r}2x+4y=8\\-3x+5y=-6\end{array}\right\}$ (solución)

f) $\left.\begin{array}{r}3x-4y=-8\\2x-6y=4\end{array}\right\}$ (solución)

g) $\left.\begin{array}{r}-5x+6y=8\\-2x+4y=10\end{array}\right\}$ (solución)

h) $\left.\begin{array}{r}4x+5y=7\\2x-8y=9\end{array}\right\}$ (solución)

i) $\left.\begin{array}{r}-5x+6y=8\\-2x+4y=10\end{array}\right\}$ (solución)

j) $\left.\begin{array}{r}3x-7y=9\\-10x+8y=12\end{array}\right\}$

(solución)

k) $\left.\begin{array}{r}x-2y=3\\-4x+5y=-6\end{array}\right\}$ (solución)

l) $\left.\begin{array}{r}-2x+3y=-4\\5x+6y=8\end{array}\right\}$ (solución)

m) $\left.\begin{array}{r}2x+4y=8\\-2x+3y=6\end{array}\right\}$ (solución)

n) $\left.\begin{array}{r}x+2y=4\\-2x+3y=6\end{array}\right\}$

o) $\left.\begin{array}{r}x-2y=3\\-4x+5y=-6\end{array}\right\}$ (solución)

p) $\left.\begin{array}{r}2x+4y=8\\-x+3y=6\end{array}\right\}$ (solución)

q) $\left.\begin{array}{r}2x-5y=10\\-3x+8y=14\end{array}\right\}$ (solución)

Más ejercicios:

Gracias por tu atención. Puedes dejar un comentario en mi libro de visitas.